# Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 7 im Wintersemester 2021 (am 26.11.21):
Reguläre Funktionen

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

| Referenz | Bedeutung |
|---|---|
| x.y.z | verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3. |
| WS 20.x, y.z | verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020. |
| SS 21.x, y.z | verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021. |
| y.z | verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung |

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

# 5b Reguläre Funktionen

## 5b.1. Offene Hauptmengen (vgl. 1.3.5)

### 5b.1.1 Definition

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Eine offene Hauptmenge von X ist eine Menge der Gestalt

$$D(f) := \{x \in X \mid f(x) = 0\} \; ( = X - V(f))$$

mit $f \in k[X]$.

**Bemerkung**

Als Komplement der abgeschlossenen Menge V(f) ( $\subseteq$ X) ist D(f) offen bezüglich der Zariski-Topologie von X.

### 5b.1.2 Eigenschaften offener Hauptmengen

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $f,g \in k[X]$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $D(f^n) = D(f)$ für jede natürliche Zahl n.

(ii) $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

(iii) $D(f) \subseteq D(g) \Leftrightarrow f^n \in g \cdot k[X]$ für eine natürliche Zahl n.

(iv) Die offenen Hauptmengen von X bilden eine Topologie-Basis von X. Genauer: jede offene Menge von X ist sogar Vereinigung von endlich vielen offenen Hauptmengen.

(v) X ist quasi-kompakt, d.h. für jede offene Überdeckung von X ist X bereits Vereinigung von endlich vielen Mengen dieser Überdeckung.

**Beweis**. Zu (i). Weil $f: X \longrightarrow k$ eine Funktion mit Werten in einem Körper ist, gilt

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

also

$$f^n(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ für jedes } x \in X.$$

Zu (ii). Weil $f,g: X \longrightarrow k$ Funktionen mit Werten in einem Körper sind, gilt

$$(f\bullet g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

also

$$(f\bullet g)(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

Zu (iii). Beweis von "$\Leftarrow$": Sei $f^n \in g\bullet k[X]$, d.h. $f^n \in g\bullet h$ mit $h \in k[X]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D(f) &= D(f^n) && \text{(nach (i))} \\ &= D(g) \cap D(h) && \text{(nach (ii))} \\ &\subseteq D(g). \end{aligned}$$

Beweis von "$\Rightarrow$": Sei $D(f) \subseteq D(g)$. Dann gilt nach Definition der offenen Hauptmengen

$$V(g\bullet k[X]) = V(g) \subseteq V(f) = V(f\bullet k[X])$$

also nach 1.1.4, Aufgabe 3,

$$f \in \sqrt{f\bullet k[X]} \subseteq \sqrt{g\bullet k[X]},$$

d.h. eine Potenz von f liegt in $g\bullet k[X]$.

Zu (iv). Jede offene Menge U von X ist Komplement einer abgeschlossnen Menge und damit von der Gestalt

$$U = X - V(I)$$

mit einem Ideal $I \subseteq k[X]$. Weil $k[X]$ noethersch ist, hat I die Gestalt.

$$I = \sum_{i=1}^{s} f_i\bullet k[X] \text{ mit } f_1,\dots,f_r \in k[X].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} U &= X - V(f_1,\dots,f_r) \\ &= X - V(f_1) \cap\dots\cap V(f_r) \\ &= (X - V(f_1)) \cup\dots\cup (X-V(f_r)) \\ &= D(f_1) \cup\dots\cup D(f_r). \end{aligned}$$

Zu (v). Sei

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \text{ mit } U_i \text{ offen in X für jedes i.} \qquad (1)$$

Nach (iv) ist X Vereinigung von offenen Hauptmengen, von denen jede ganz in einem $U_i$ liegt. Es reicht zu zeigen, bereits endlich viele dieser offenen Hauptmengen überdecken X, d.h. wir können annehmen,

$$U_i = D(f_i) \text{ für jedes } i \in I.$$

Wegen (1) haben die $f_i$ keine gemeinsame Nullstelle, d.h. es gilt

$$V(\sum_{i\in I} f_i\bullet k[X]) = \emptyset = V(k[X]).$$

Nach 1.1.4, Aufgabe 3 gilt

$$1 \in \sqrt{k[X]} = \sqrt{\sum_{i\in I} f_i\bullet k[X]},$$

d.h. eine Potenz von 1 liegt im Ideal $\sum_{i\in I} f_i\bullet k[X]$. Dann liegt aber 1 selbst bereits in diesem Ideal. Es gibt Elemente $g_j \in k[X]$ und $i_1,...,i_s \in I$ mit

$$1 = \sum_{j=1}^{s} g_j\bullet f_{i_j}.$$

Dann haben aber bereits $f_{i_1},...,f_{i_s}$ keine gemeinsame Nullstelle. Es gilt also

$$X = D(f_{i_1})\cup...\cup D(f_{i_s}) = U_{i_1}\cup...\cup U_{i_s}.$$

**QED**.

## 5b.2 Reguläre Funktionen auf offenen Hauptmengen (vgl.1.3.5)

### 5b.2.1 Definition

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$f: U \longrightarrow k$$

eine Funktion. Dann heißt f <u>regulär im Punkt</u> $x \in U$, wenn es eine offene Menge $U_x$ und Polynome $g_x$ und $h_x$ mit Koeffizienten in k gibt mit

$$x \in U_x \subseteq U \text{ und } f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \text{ (und insbesondere } h_x(y) \neq 0\text{) für jedes } y \in U_x. \quad (1)$$

Die Funktion f heißt <u>reguläre Funktion</u> auf U, wenn f in jedem Punkt von U regulär ist. Die Menge der regulären Funktionen auf U wird mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

bezeichnet.

**Bemerkungen**

(i) $\mathcal{O}_X(U)$ ist eine k-Algebra.

(ii) Wir haben zu zeigen, daß die hier angegebene Definition der regulären Funktion im Fall U = X mit der bisher verwendeten übereinstimmt. Das ist gerade die Aussage des nachfolgenden Satzes.

### 5b.2.2 Die regulären Funktionen auf einer algebraischen Menge

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann gilt

$$\mathcal{O}_X(X) = k[X].$$

**Beweis** (vgl. 1.4.5). Für jedes Element $f \in k[X]$ gibt nach Definition von k[X] ein Polynom p mit Koeffizienten aus k mit

$$f(y) = p(y)/1 \text{ für jedes } y \in X.$$

Deshalb gilt

$$k[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$f \in \mathcal{O}_X(X).$$

Dann gibt es für jedes $x \in U := X$ eine offenene Menge $U_x$, für welche die definierende Bedingung (1) von 5b.2.1 erfüllt ist. Wir können dabei annehmen, $U_x$ ist eine offene Hauptmenge, sagen wir

$$U_x = D(a_x) \text{ mit } a_x \in k[X].$$

1. Schritt. Reduktion auf den Fall $a_x = h_x$

Wegen (1) gilt $D(a_x) \subseteq D(h_x)$, also $V(h_x) \subseteq V(a_x)$, also

$$a_x \in \sqrt{a_x \bullet k[X]} \subseteq \sqrt{h_x \bullet k[X]},$$

d.h. eine Potenz von $a_x$ ist ein Vielfaches von $h_x$, sagen wir

$$a_x^{n_x} = h_x \bullet h'_x \text{ mit } n_x \in \mathbb{N} \text{ und } h'_x \in k[X].$$

In den Punkten von $U_x = D(a_x)$ gilt damit

$$f = \frac{g_x}{h_x} = \frac{g_x}{a_x^{n_x}/h'_x} = \frac{g_x h'_x}{a_x^{n_x}}$$

Den Nenner in der Darstellung von f können wir also durch eine Potenz von $a_x$ ersetzen. Da sich $U_x = D(a_x)$ nicht ändert, wenn wir $a_x$ in eine Potenz erheben, können wir annehmen,

$$h_x = a_x.$$

2. Schritt. Beweis der Behauptung im Fall $h_x = a_x$..

Die offenen Mengen $U_x = D(h_x)$ mit $x \in X$ bilden eine offene Überdeckung von X. Weil X quasi-kompakt ist, überdecken bereits endlich viele der $U_x$ den Raum X. Wir finden also endlich viele

$$h_1, ..., h_s \in k[X] \text{ und zugehörige } g_1,..., g_s \in k[X]$$

mit

$$X = D(h_1) \cup ... \cup D(h_s) \text{ und } f = \frac{g_i}{h_i} \text{ auf } U_i = D(h_i).$$

Für je zwei Indizes $i, j \in \{1,...,s\}$ gilt

$$\frac{g_i}{h_i} = f = \frac{g_j}{h_j} \text{ auf } U_i \cap U_j = D(h_i h_j).$$

Deshalb ist $g_i h_j - g_j h_i$ gleich Null auf $D(h_i h_j)$ und $h_i h_j = 0$ außerhalb $D(h_i h_j)$. Zusammen ergibt sich:

$$h_i h_j \bullet (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \text{ in } k[X],$$

d.h.

$$h_j^2 \bullet g_i \bullet h_i = h_j \bullet g_j \bullet h_i^2 = 0 \text{ in } k[X]. \qquad (2)$$

Weil die $D(h_i)$ den Raum X überdecken, liegt jeder Punkt in einem $D(h_i)$, d.h. in jedem Punkt ist ein $h_i$ von Null verschieden. Damit ist

$$V(h_1^2,...,h_s^2) = \varnothing = V(1),$$

also

$$1 \in \sqrt{1\cdot k[X]} = \sqrt{h_1^2\cdot k[X]+\ldots+h_s^2\cdot k[X]}.$$

Damit liegt eine Potenz von 1 im Ideal $h_1^2\cdot k[X]+\ldots+h_s^2\cdot[X]$. Es gibt Koeffizienten $b_i$ mit

$$1 = \sum_{i=1}^{s} b_i\cdot h_i^2 \text{ , } b_i \in k[X]. \qquad (3)$$

Für $x \in D(h_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h_j^2(x)\cdot \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) &= \sum_{i=1}^{s} b_i(x)h_j(x)g_j(x)h_i^2(x) && \text{(nach (2))} \\ &= h_j(x)g_j(x) \sum_{i=1}^{s} b_i(x)\ h_i^2(x) \\ &= h_j(x)g_j(x) && \text{(nach (3))} \end{aligned}$$

also - weil $h_j(x) \neq 0$ ist -

$$f(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{h_j(x)g_j(x)}{h_j^2(x)} = \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) = (\sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i)(x).$$

Weil jeder Punkt $x \in X$ in einem $D(h_j)$ liegt, gilt

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i$$

in allen Punkten von X, d.h. es ist

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i \in k[X].$$

**QED**.

### 5b.2.3 Die regulären Funktionen auf einer offenen Hauptmenge

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $f \in k[X] - \{0\}$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f \cong k[X][t] / (1\text{-}t\cdot f)$$

(mit einer Unbestimmten t).
**Beweis** (vgl. 1.4.6).
Weil f in jedem Punkt von D(f) ungleich Null ist, gilt

$$k[X]_f = \{\frac{a}{f^n} \mid a\in k[X],\ n \in \mathbb{N}\ \} \subseteq \mathcal{O}_X(D(f)).$$

1. <u>Schritt</u>. $k[X]_f \cong k[X][t]/(1\text{-}t\cdot f)$ als k-Algebren.

Dabei entspricht das Element 1/f der Restklasse der Unbestimmten t.

Es reicht zu zeigen, $k[X][t]/(1\text{-}t\cdot f)$ besitzt die Universalitätseigenschaft des Quotientenring $k[X]_f$ bezüglich des Homomorphismus von k-Algebren

$$\varphi: k[X] \longrightarrow k[X][t]/(1\text{-}t\cdot f),\ \alpha \mapsto \alpha \bmod(1\text{-}tf).$$

Für $p(t) \in k[X][t]$ bezeichne $[p(t)]$ die Restklasse von p(t) im Faktorring rechts. Dann gilt

$$\varphi(f)\cdot[t] = [f]\cdot[t] = [f\cdot t] = [1].$$

Das Bild von f bei $\varphi$ ist eine Einheit, deren Inverses gerade die Restklasse der Unbestimmten t ist. Die Potenzen von f, werden dann aber auch in Einheiten abgebildet. Sei jetzt

$$\psi: k[X] \longrightarrow A$$

ein Homomorphismus von Ringen mit 1, der das Element f und damit jede Potenz von f in eine Einheiten abbildet.

Wir haben zu zeigen, $\psi$ faktorisiert sich eindeutig über $\varphi$, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm von kommutativen Ringen mit 1,

$$\begin{tikzcd} k[X] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & k[X][t]/(1-t\bullet f) \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

und eindeutig bestimmten $\widetilde{\psi}$. Nehmen wir zunächst an, $\widetilde{\psi}$ existiert und zeigen die Eindeutigkeit. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt für $\alpha\in k[X]$:

$$\widetilde{\psi}(\ \alpha \bmod (1-t\bullet f) \qquad = \widetilde{\psi}(\varphi(\alpha)) = \psi(\alpha)$$

d.h. $\widetilde{\psi}$ ist auf dem von Bild k[X] eindeutig festgelegt.
Weiter ist

$$\begin{aligned}
\psi(f)\bullet\widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) &= \widetilde{\psi}(\varphi(f))\bullet \widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) && (\text{wegen } \psi = \widetilde{\psi}\circ\varphi) \\
&= \widetilde{\psi}(\ f \bmod (1-t\bullet f))\bullet \widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) && (\text{Definition von } \varphi) \\
&= \widetilde{\psi}(f\bullet t \bmod (1-t\bullet f)) && (\widetilde{\psi} \text{ ist ein Ring-Homomorphismus}) \\
&= \widetilde{\psi}(1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

also

$$\widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) \qquad = \psi(f)^{-1}.$$

Damit ist das Bild der Restklasse von t eindeutig festgelegt. Weil $k[X][t]/(1-t\bullet f)$ über k[X] von dieser Restklasse erzeugt wird, ist $\widetilde{\psi}$ festgelegt.

<u>Existenz von</u> $\widetilde{\psi}$.

Wir setzen $\psi$ auf den Polynomring fort, indem wir die Unbestimmte in $\psi(f)^{-1}$ abbilden:

$$\widetilde{\psi}': k[X][t] \longrightarrow A,\ t \mapsto \psi(f)^{-1},\ p(t) \mapsto p^{\psi}(\psi(f)^{-1}).$$

Dabei bezeichne $p^{\psi}$ das Polynom in t, welches man aus p erhält, indem man auf alle Koeffizienten von p die Abbildung $\psi$ anwendet.
Es gilt

$$\widetilde{\psi}'(1-t\bullet f) = \widetilde{\psi}'(1) - \widetilde{\psi}'(t)\bullet \widetilde{\psi}'(f) = 1 - \psi(f)^{-1}\bullet\psi(f) = 1-1 = 0,$$

d.h. $\widetilde{\psi}'$ faktorisiert sich über $k[X][t]/(1-t\bullet f)$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[X] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\psi"'] & k[X][t] \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}'"] & k[X][t]/(1-t\bullet f) \arrow[dl, "\widetilde{\psi}''"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Dabei ist i die natürliche Einbettung in den Polnomring, $\rho$ die natürliche Abbildung auf den Faktorring und $\widetilde{\psi}$" die Abbildung mit

$$\widetilde{\psi}''(p(t) \bmod (1\text{-}t\bullet f)) = \widetilde{\psi}'(p(t)) = p^{\psi}(\psi(f)^{-1}).$$

Wegen $\rho\circ i = \varphi$ faktorisiert sich damit die Abbildung $\psi$ über $\varphi$. Die Aussage des ersten Schritts ist bewiesen.
2. <u>Schritt</u>. $\mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f$
Die Menge

$$Y := \{(x, \lambda) \mid x \in X \text{ und } \lambda\in k \text{ mit } 1\text{-}\lambda\bullet f(x) = 0\}$$

ist eine algebraische Menge von $k^{n+1}$. Ihren Koordinatenring erhält man aus dem Faktorring

$$k[X][t]/(1\text{-}t\bullet f) \cong k[X]_f\,,$$

indem man das Ideal $(1\text{-}t\bullet f)$ durch dessen Radikal ersetzt. Weil $k[X]$ reduziert ist, ist auch $k[X]_f$ reduziert, d.h. das Ideal $(1\text{-}t\bullet f)$ ist gleich seinem Radikal und der Koordinationring von Y ist gleich

$$k[Y] = k[X][t]/(1\text{-}t\bullet f).$$

Damit gilt nach 1.4.5,

$$\mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f.$$

Die Abbildung

$$\pi{:}Y \longrightarrow X,\ (x, \lambda) \mapsto x,$$

ist injektiv, weil durch die Bedingung $1\text{-}\lambda\bullet f(x) = 0$ der Wert von $\lambda$ eindeutig durch $f(x)$ festgelegt ist. Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen $x\in X$ mit $f(x) \neq 0$. Damit ist die Abbildung

$$\varphi{:}Y \longrightarrow D(f),\ (x, \lambda) \mapsto x,$$

wohldefiniert und bijektiv. Für jede auf D(f) reguläre Funktion $\alpha$ ist $\alpha\circ\varphi$ regulär auf Y. Wir erhalten so eine injektive Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) = k[X][t]/(1\text{-}t\bullet f) \xrightarrow{\cong} k[X]_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$$

Andererseits ist für jedes $a \in k[X]$ und jede natürliche Zahl n, der Quotient $\frac{a}{f^n}$ eine reguläre Funktion auf D(f), die wie folgt abgebildet wird

$$\frac{a}{f^n} \mapsto \frac{a\circ\pi}{(f\circ\pi)^n} = [a]\bullet[t^n] = [a\bullet t^n] \mapsto \frac{a}{f^n}.$$

Jedes Element von $\mathcal{O}_Y(Y)$ kommt also von einem Element von $\mathcal{O}_X(D(f))$,

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f$$

**QED**.

# Index

**—F—**

Funktion
  reguläre, auf einer offenen Menge, 3
  reguläre, in einem Punkt, 3

**—H—**

Hauptmenge
  offene, 1

**—M—**

Menge
    offene Hauptmenge, 1

**—O—**

offene Hauptmenge, 1

**—R—**

reguläre Funktion
    auf einer offenen Menge, 3
    in einem Punkt, 3

# Inhalt

**LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN** 1

**5B REGULÄRE FUNKTIONEN** 1

**5b.1. Offene Hauptmengen (vgl. 1.3.5)** 1
5b.1.1 Definition 1
5b.1.2 Eigenschaften offener Hauptmengen 1

**5b.2 Reguläre Funktionen auf offenen Hauptmengen (vgl.1.3.5)** 3
5b.2.1 Definition 3
5b.2.2 Die regulären Funktionen auf einer algebraischen Menge 3
5b.2.3 Die regulären Funktionen auf einer offenen Hauptmenge 5

**INDEX** 7

**INHALT** 8